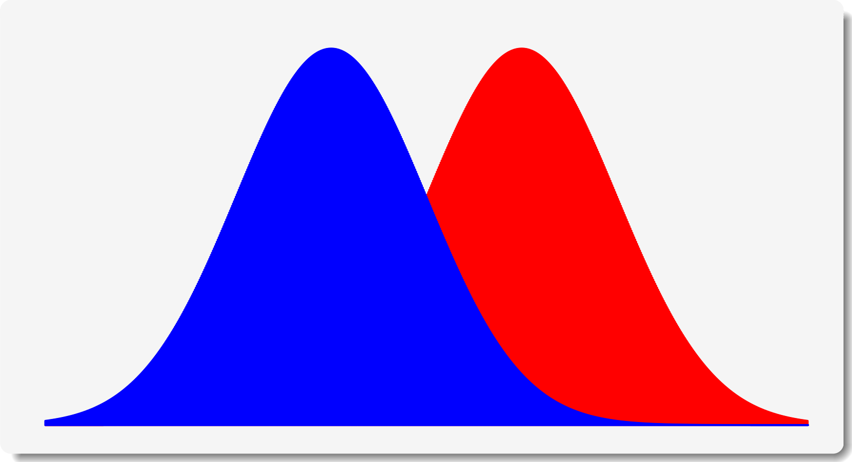
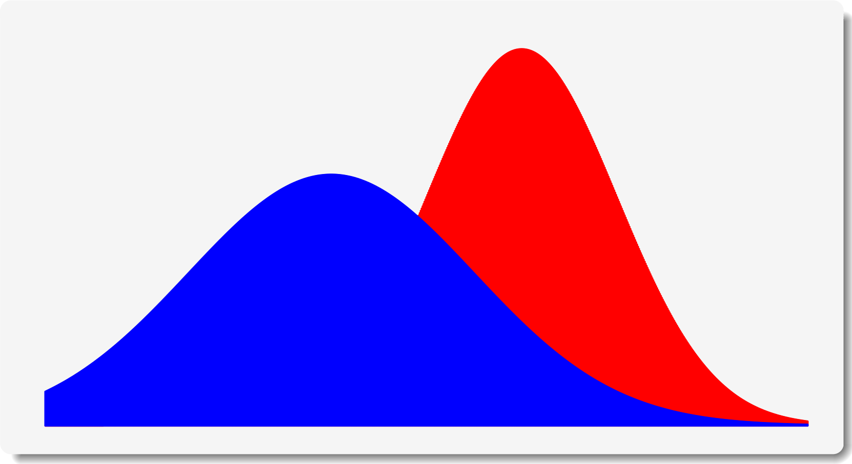
Optimal Design of Non-Parametric Two-Sample Tests

Paul Bürkner, Philipp Doebler, Heinz Holling

Institut für Psychologie
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

17.09.2015





Problemstellung

- Sei T ein Zweistichproben-Test zu $H0 : G(Y) = F(X)$ gegen $H1 : G(Y) \neq F(X)$.
- Seien m und n die Stichprobengrößen der beiden Gruppen bei fester Gesamtstichprobengröße $N := m + n$.
- Sei $\omega = m/N$ der Anteil der Gesamtstichprobe, der für die erste Gruppe verwendet wird.
- Maximiere die Power $P(T = H1|H1)$ über ω

Wilcoxon-Mann-Whitney-Test

- Teststatistik:

$$U_{mn} := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \chi(x_i, y_j)$$

  mit

$$\chi(x_i, y_j) := \begin{cases} 1 \text{ if } x_i \geq y_j \\ 0 \text{ if } x_i < y_j. \end{cases}$$

- U_{mn} ist approximativ normalverteilt für alle Verteilungen F und G, sofern sich die Verteilungen überlappen (also $P(X \geq Y) \in (0,1)$).
- Unter $H0$ gilt:

$$E(U_{mn}) = \frac{mn}{2} \qquad V(U_{mn}) = \frac{mn(m+n+1)}{12}.$$

Erwartungswert und Varianz unter $H1$

$$
\begin{aligned}
E(U_{mn}) &= mnP(X \geq Y), \\
V(U_{mn}) &= mn\Big(P(X \geq Y) - (m+n-1)P(X \geq Y)^2 \\
&\qquad + (n-1)\int G(x)^2 df(x) + (m-1)\int (1-\tilde{F}(x))^2 dg(x)\Big).
\end{aligned}
$$

Optimal Design für symmetrische Verteilungen gleicher Form

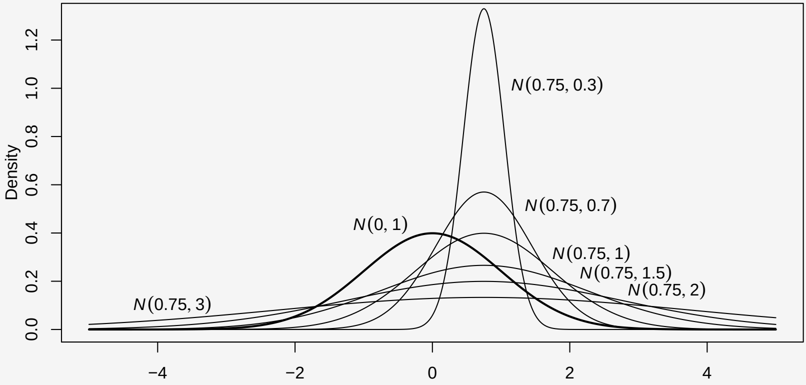
- Für symmetrische Verteilungen gleicher Form (d.h. $H1 : G(Y) = F(X + a)$) folgt durch Standardisieren:

$$\mu_{mn} = \frac{\sqrt{\omega(1-\omega)}N(P(X \geq Y) - 1/2)}{\sqrt{P(X \geq Y) - (N-1)P(X \geq Y)^2 + (N-2)\int G(x)^2 df(x)}}$$

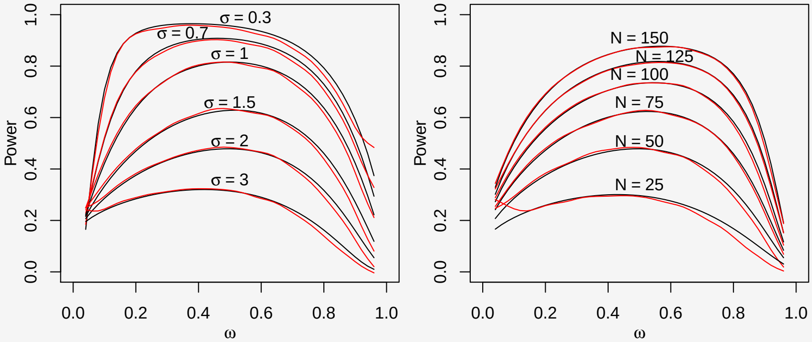
$$\sigma^2_{mn} = \frac{P(X \geq Y) - (N-1)P(X \geq Y)^2 + (N-2)\int G(x)^2 df(x)}{(N+1)/12}$$

- Unter Zuhilfenahme von Symmetrie-Eigenschaften folgt, dass $\omega = 0.5$ optimal ist.
- Die Normalverteilungsapproximation wird dafür nicht gebraucht.

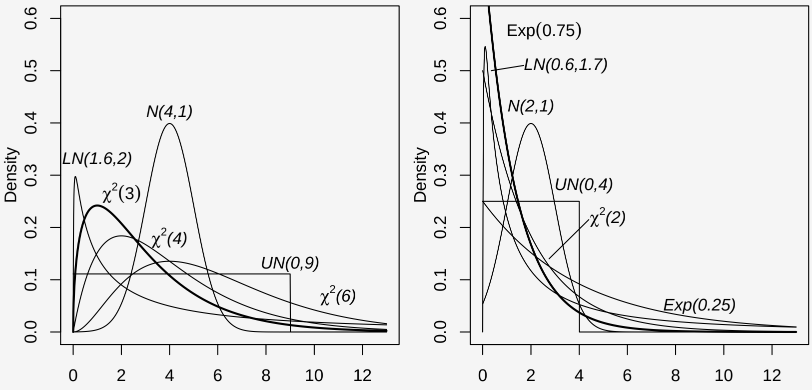
In Simulationen genutzte symmetrische Verteilungen



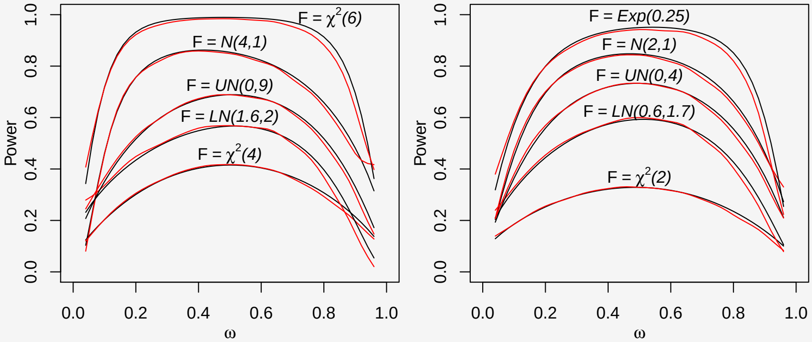
Optimal Design für symmetrische Verteilungen ungleicher Form



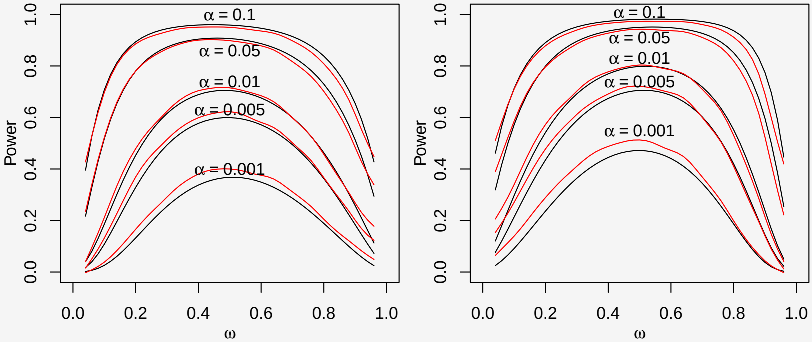
In Simulationen genutzte asymmetrische Verteilungen



Optimal Design für asymmetrische Verteilungen ungleicher Form



Optimal Design für asymmetrische Verteilungen ungleicher Form



Kolmogorov-Smirnov-Test

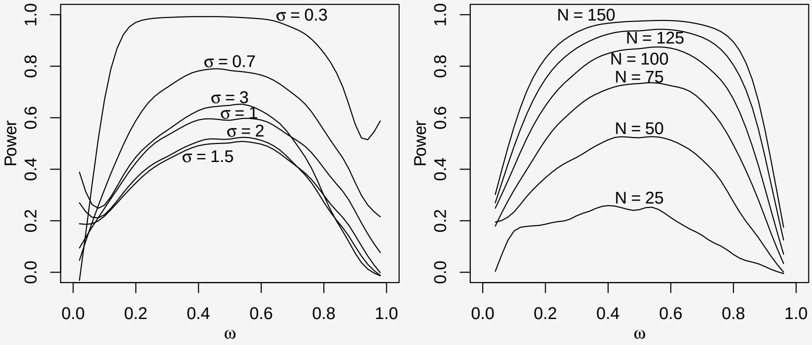
- Teststatistik:

$$D_{mn} := \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_m(x) - G_n(x)|, \tag{1}$$

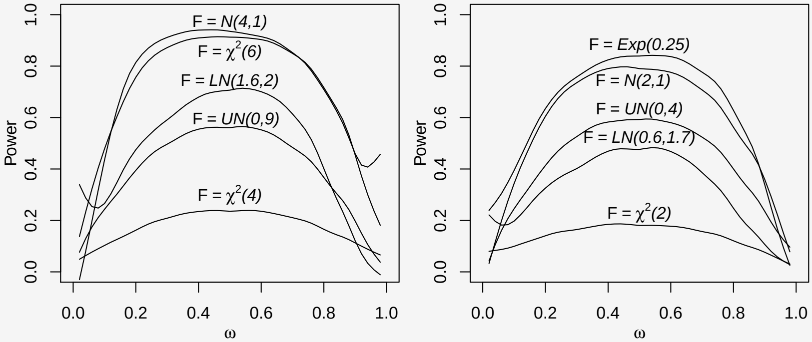
- Unter der $H0$ ist die approximative Verteilung von D_{mn} bekannt:

$$\lim_{m,n \to \infty} P\left(D_{mn} \leq d\right) = 1 - 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} e^{-2i^2 d^2}, \tag{2}$$

Optimal Design für symmetrische Verteilungen ungleicher Form



Optimal Design für asymmetrische Verteilungen ungleicher Form



Optimal Design für asymmetrische Verteilungen ungleicher Form